# Zadania zaliczeniowe do kursu PhD Open
## *Graph Queries & Description Logics*

Filip Murlak

Pracujemy z grafami skierowanymi, w których każdy wierchołek ma dowolną liczbę etykiet z ustalonego zbioru $\Gamma$ a każda krawędź ma dokładnie jedną etykietę z ustalongo zbioru $\Sigma$. Równoległe krawędzie są dozwolone, o ile mają różne etykiety. Przez $V^G$ oznaczamy zbiór wierzchołków grafu $G$. Dla $r \in \Sigma$, wierzchołek $u$ jest *$r$-następnikiem* wierzchołka $v$ jeśli istnieje krawędź z $v$ to $u$ o etykiecie $r$. Formuły logiki $\mathcal{ALC}$ generowane są przez następującą gramatykę:

$$\phi ::= \bot \mid A \mid \phi \sqcap \phi \mid \neg\phi \mid \exists r.\phi$$

gdzie $A \in \Gamma$ i $r \in \Sigma$. W grafie $G$ formuła $\phi$ definiuje zbiór wierzchołków $\phi^G$ zadany rekurencyjnie:

$$\bot^G = \emptyset, \quad A^G = \{v \in V^G \mid v \text{ ma etykietę } A\}, \quad (\phi_1 \sqcap \phi_2)^G = \phi_1^G \cap \phi_2^G, \quad (\neg\phi)^G = V^G \setminus \phi^G,$$
$$(\exists r.\phi)^G = \{v \in V^G \mid \text{pewien } r\text{-następnik } v \text{ należy do } \phi^G\}.$$

Zapytania z klasy CRPQ reprezentujemy jako grafy, w których każdy wierzchołek ma dowolną liczbę etykiet ze zbioru $\Gamma$, a każda krawędź ma dokładnie jedną etykietę, która jest wyrażeniem regularnym nad alfabetem $\Sigma \cup \Gamma$. Mówimy, że graf $G$ *spełnia* zapytanie $Q$ (i piszemy $G \models Q$), jeśli istnieje funkcja $h$ z wierzchołków grafu $Q$ w wierzchołki grafu $G$ spełniająca następujące warunki:

- jeśli wierzchołek $x$ ma etykietę $A$ w $Q$, to wierzchołek $h(x)$ ma etykietę $A$ w $G$;
- jeśli krawędź z $x$ do $y$ w $Q$ ma etykietę $\alpha$, to istnieje słowo $a_1 a_2 \dots a_n \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ generowane przez wyrażenie regularne $\alpha$ oraz taki ciąg wierzchołków $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ w $G$, że $v_1 = h(x)$, $v_{n+1} = h(y)$ oraz dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, jeśli $a_i \in \Gamma$ to $v_i$ ma etykietę $A$ i $v_{i+1} = v_i$, a jeśli $a_i \in \Sigma$, to $v_{i+1}$ jest $a_i$-następnikiem $v_i$.

**Zadanie 1.** Rozważmy skończony graf, w którym każdy wierzchołek dokładnie jedną etykietę ze skończonego zbioru $\Gamma$, a każda krawędź ma dokładnie jedną etykietę ze skończonego zbioru $\Sigma$. Wyróżnijmy w tym grafie dwa wierzchołki i rozważamy następującą grę dla dwóch graczy. Na początku, na obu wyróżnionych wierzchołkach stawiamy po jednym pionku. Następnie gracze na przemian przesuwają pionki po krawędziach grafu, zawsze o dokładnie jedną krawędź: pierwszy gracz wybiera pionek i go przesuwa, a drugi gracz przesuwa pozostały pionek. Rozgrywka kończy się, gdy któryś z graczy nie może wykonać ruchu, bądź trwa w nieskończoność. W wyniku rozgrywki każdy z pionków widzi (skończony bądź nieskończony) ciąg etykiet wierzchołków i krawędzi (na przemian). Drugi gracz wygrywa rozgrywkę jeśli te ciągi są identyczne. Udowodnij, że pierwszy gracz ma strategię wygrywającą w powyższej grze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje formuła logiki $\mathcal{ALC}$ definiująca zbiór zawierający dokładnie jeden z wyróżnionych wierzchołków.

**Zadanie 2.** *Problem spełnialności dla logiki $\mathcal{ALC}$* polega na rozstrzygnięciu, czy dla danej etykiety $A \in \Gamma$ i formuły $\phi$ logiki $\mathcal{ALC}$ istnieje taki graf $G$, że pewien wierzchołek w $G$ ma etykietę $A$ i $\phi^G = V^G$. Udowodnij, że ten problem jest zupełny w klasie EXPTIME.

**Zadanie 3.** *Problem skończonej spełnialności dla CRPQ modulo $\mathcal{ALC}$* polega na rozstrzygnięciu czy dla danego zapytania $Q$ z klasy CRPQ i formuły $\phi$ logiki $\mathcal{ALC}$, istnieje taki skończony graf $G$, że $G \models Q$ oraz $\phi^G = V^G$. Udowodnij, że ten problem jest rozstrzygalny.