Algorytmy aproksymacyjne dla problemów stochastycznych

Piotr Sankowski

Uniwersytet Warszawski

PhD Open, 5-6 grudzień, 2008

Plan - Wykład IV

- Uniwersalne algorytmy aproksymacyjne
- Uniwersalne stochastyczne algorytmy aproksymacyjne
- Uniwersalny problem pokrycia zbiorami
  - górne ograniczenia
  - dolne ograniczenia
- Universal Stochastic Set Cover Problem
  - górne ograniczenia
  - dolne ograniczenia

Algorytmy stochastyczne

Zakładamy, że żądanie dla algorytmu pochodzą z uniwersum U, na którym zadany mamy rozkład prawdopodobieństwa $\pi : U \longrightarrow [0,1]$.

Dane wejściowe ω generowane są poprzez k'krotne niezależne losowanie z π.

Interesuje nas oczekiwany koszt algorytmu.

Algorytmy stochatyczne

Możemy rozważać różne wersje algorytmów:

2-etapowe problemy – algorytm otrzymuje ω jako całość, jednak może zawczasu wykupić część rozwiązania taniej,

problemy online – ω może być ujawniana element po elemencie,

problemy uniwersalne – algorytm otrzymuje ω jako całość, ale zawczasu musi przygotować uniwersalne rozwiązanie.

Współczynnik aproksymacji

Naszym celem jest minimalizacja oczekiwanego kosztu algorytmu.

Dlatego definiujemy współczynnik kompetytywny algorytmu jako:

$$\mathsf{RoE}(\mathsf{ALG}) = \max_{\pi} \max_{k} \frac{\mathbf{E}_{\omega \in \pi^k, r}[\mathsf{ALG}(\omega, r)]}{\mathbf{E}_{\omega \in \pi^k}[\mathsf{OPT}(\omega)]},$$

gdzie:

- r oznacza losowe wybory algorytmu.
- $\mathsf{OPT}(\omega)$ koszt optymalnego rozwiązania (offline).

Algorytmy uniwersalne

W algorytmach uniwersalnych, wprowadzonych przez Jia et al. [STOC '05], musimy zawczasu przypisać elementy $e \in U$ rozwiązaniom $\mathbf{S}(e)$ je spełniającym

Rozwiązanie dla danych wejściowych ω jest dane jako:

$$\mathbf{S}(\omega) = \cup_{e \in \omega} \mathbf{S}(e).$$

A jego koszt to:

$$c(\mathbf{S}(\omega)) = c(\cup_{e \in \omega} \mathbf{S}(e)).$$

Algorytmy uniwersalne

Naszym celem jest znalezienie funkcji $\mathbf{S}$ takiej, że $\mathbf{S}(\omega)$ jest zawsze maksymalnie blisko kosztu optymalnego rozwiązania dla ω.

Chcemy mimalizować uniwersalny współczynnik aproksymacji:

$$\mathsf{UApx}(\mathbf{S}) = \max_{\omega \subseteq U} \frac{c(\mathbf{S}(\omega))}{c(\mathsf{OPT}(\omega))}.$$

Algorytmy uniwersalne

Algorytmy uniwersalne mogą się nam przydać gdy:

- chcemy zaplanować uniwersalną trasę TSP,
- chcemy zaplanować uniwersalny sieć komunikacji,
- chcemy skomunikować sieć sensorów o małej pamięci.

Rozwiązanie jakie konstruujemy jednocześnie aproksymuje wszystkie możliwe przypadki.

Stochastyczne algorytmy apr.

Zazwyczaj w uniwersalnych stochastycznych problemach elementy z U są wybierane do ω niezależnie zgodnie z rozkładem π.

$$\mathsf{RoE}(\mathbf{S}) = \frac{\mathbf{E}_\omega[c(\mathbf{S}(\omega))]}{\mathbf{E}_\omega[c(\mathsf{OPT}(\omega))]}$$

Ze względu na koncentrację średniej algorytmy te są bardzo podobne do algorytmów online dla ustalonego k.

Wyniki

Twierdzenie 1 (Drzewo Steinera) *Istnieje uniwersalny algorytm stochastyczny dla problemu drzewa Steinera taki, że* $\mathsf{RoE} = O(1)$.

Ponownie wynik także jest prawdziwy dla problemów addytywnych.

Twierdzenie 2 *Istnieją uniwersalne algorytmy stochastyczne dla problemów lasu Steinera, lokalizacji fabryk, oraz pokrycia wierzchołkowego takie, że* $\mathsf{RoE} = O(1)$.

Uniwersalne pokrycie zbiorami

Instancją problemu uniwersalnego pokrycia zbiorami jest trójka (U, C, c), gdzie:

- $U = \{e_1, \ldots, e_n\}$ zbiór podstawowy,
- $C = \{S_1, \ldots, S_m\}$ kolekcja podzbiorów U,
- $c : C \rightarrow R^+$ to koszty zbiorów.

Rozwiązaniem jest funkcja **S** $: U \rightarrow C$ taka, że $e \in f(e)$ dla każdego $e \in U$.

Uniwersalne pokrycie zbiorami

Rozważmy następujący algorytm:

$D = \emptyset$;

while $D \neq U$ **do**

  znajdź zbiór S minimalizujący $\frac{c(S)}{\sqrt{|S-D|}}$;

  dla każdego $e \in S - D$ przypisujemy $\mathbf{S}(e) = S$;

  $D = D \cup S$;

zwróć $\mathbf{S}$;

Ułamek $\frac{c(S)}{\sqrt{|S-D|}}$ nazywamy efektywnością zbioru S.

Uniwersalne pokrycie zbiorami

Twierdzenie 3 (Jia et al. '05) *Powyższy algorytm generuje rozwiązanie* $\mathbf{S}$ *o współczynniku* $\mathsf{UApx}(\mathbf{S}) = O(\sqrt{n \log n})$.

Niech S będzie dowolnym podzbiorem U oraz nich $s = |S|$.

Rozważymy dwa przypadki:
- w którym S należy do C,
- gdy S nie należy do C.

Uniwersalne pokrycie zbiorami

W pierwszym przypadku niech k będzie liczbą iteracji algorytmu oraz nich $S_1, S_2, \ldots, S_k$ będą wybranymi zbiorami.

Dla zbioru S_i niech N_i (oraz n_i) oznacza liczbę elementów z U (bądź S) przypisaną do S_i przez **S**.

To znaczy:

$$N_i = |\{e \in U : f(e) = S_i\}|,$$

$$n_i = |\{e \in S : f(e) = S_i\}|.$$

Uniwersalne pokrycie zbiorami

Ponieważ S jest też rozważane w każdej iteracji to:

$$\frac{c(S_i)}{\sqrt{N_i}} \leq \frac{c(S)}{\sqrt{s - n_1 - \ldots - n_{i-1}}}.$$

Korzystając z tej nierówności otrzymujemy:

$$\frac{c(S_1) + c(S_2) + \ldots + c(S_k)}{c(S)} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{N_1}}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{N_2}}{\sqrt{s - n_1}} + \ldots + \frac{\sqrt{N_2}}{\sqrt{s - n_1 - \ldots - n_{k-1}}}$$

Uniwersalne pokrycie zbiorami

$$\leq \frac{\sqrt{N_1}}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{N_2}}{\sqrt{s-n_1}} + \ldots + \frac{\sqrt{N_2}}{\sqrt{s-n_1-\ldots-n_{k-1}}}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} N_i} \times \sqrt{\frac{1}{s} + \frac{1}{s-n_1} + \ldots + \frac{1}{s-n_1-\ldots-n_{k-1}}}$$

$$\leq \sqrt{n} \times O(\sqrt{\ln s}) \leq O(\sqrt{n \ln n}).$$

Gdzie skorzystaliśmy z nierówności Schwarza.

Uniwersalne pokrycie zbiorami

Przejdźmy teraz do przypadku gdy $S \notin C$.

Niech $S_1, S_2, \ldots, S_k$ będzie optymalnym pokryciem S.

Z pierwszego przypadku wiemy, że dla każdego z tych zbiorów zachodzi $c(f(S_i)) \leq O(\sqrt{n \ln n})c(S_i)$.

A zatem

$$c(f(S)) \leq \sum_i c(f(S_i)) \leq O(\sqrt{n \ln n}) \sum_i c(S_i).$$

Uniwersalne pokrycie zbiorami

Twierdzenie 4 (Jia et al. '05) *Istnieje n-elementowa instancja dla uniwersalnego problemu pokrycia zbiorami dla której każde rozwiązanie ma współczynnik* $\mathsf{UApx} = \Omega(\sqrt{n})$.

Niech q będzie dowolną liczbą pierwszą pomiędzy $\sqrt{n}/2$ i $\sqrt{n}$, której istnienie wynika z postulatu Bertranda.

Elementy U to q^2 par (x, y) takich, że x i y należą do skończonego cała Z_q.

Do U włączamy także $n - q^2$ elementów $e_1, \ldots, e_{n-q^2}$.

Uniwersalne pokrycie zbiorami

Kolekcję C tworzą zbiory:

$$S_{a,b,c} = \{(x,y) \in U : x \in Z_q, y = P_{a,b,c}(x)\},$$

gdzie $a, b, c \in Z_q$ oraz $P_{a,b,c}(x) = ax^2 + bx + c$ jest wielomianem nad Z_q jednoznacznie związanym ze zbiorem $S_{a,b,c}$.

Ponieważ $a, b, c \in Z_q$ to dostajemy w ten sposób q^3 różnych zbiorów.

Włączamy do C także zbiór $S_0 = \{e_i : 1 \leq i \leq n - q^2\}$.

Uniwersalne pokrycie zbiorami

Niech **S** będzie dowolnym rozwiązaniem.

Ponieważ $q^2 = |U| < |C| = q^3$ to wiemy, że co najmniej jeden z $S_{a,b,c}$ nie jest w obrazie **S**.

Ponieważ wielomiany stopnia 2 nie mają więcej niż 2 punkty przecięcia, to także zbiór $S_{a,b,c}$ ma co najwyżej dwa elementy wspólne z innymi zbiorami z C.

Do pokrycia $S_{a,b,c}$ wystarczy jeden zbiór, a **S** potrzebuje do tego co najmniej $\frac{q}{2} = \Omega(\sqrt{n})$ zbiorów.

Stochastyczne pokrycie zbiorami

W przypadku *stochastycznego pokrycia zbiorami*:

- mamy dane n-elementowe uniwersum U,
- kolekcję C podzbiorów U wraz z funkcją kosztu $c : C \to R^+$,
- rozkład prawdopodobieństwa π jest rozkładem jednostajnym,
- sekwencja elementów do pokrycia $e_1, e_2, \ldots$ jest otrzymana poprzez niezależne losowanie z π.

Stochastyczne pokrycie zbiorami

Problem dla rozkładów niejednostajnych możemy przetransformować w standartowy sposób do problemu z rozkładam jednostajnym o rozmiarze n^α razy większym.

Element o prawdopodobieństwie π zamieniamy na πn^α elementów.

Tracimy w ten sposób tylko $\frac{1}{n^\alpha}$ przypadków na których musimy skonstruować rozwiązanie nie gorsze niż n^α razy.

Stochastyczne pokrycie zbiorami

W przypadku uniwersalnym konstruujemy funkcje **S** minimalizującą RoE.

W przypadku online chcemy przetwarzać żądania bez wiedzy o przyszłości.

Algorytm uniwersalny zadaje zawsze algorytm online o takim samym RoE.

Nasze rozwiązanie w kroku t to $\mathbf{S}(e_1, \ldots, e_t)$, które generuje nieodwracalne decyzje.

Algorytm uniwersalny

Rozważmy najpierw przypadek gdzie wszystkie zbiory ważą 1.

Pokażemy, że można użyć standardowego algorytmu zachłannego do konstrukcji **S**.

---

while $U \neq \emptyset$ **do**
- niech S będzie zbiorem z C maksymalizującym $|S \cap U|$;
- niech $\mathbf{S}(v) = S$ dla każdego $v \in S \cap U$;
- $U = U \setminus S$;

Wyniki

Twierdzenie 5 *Funkcja* $\mathbf{S}$ *jest uniwersalna dla stochastycznego nieważonego problemu pokrycia wierzchołkowego o* $\mathsf{RoE} = O(\log mn)$.

W przypadku niestochastycznym dla najlepszego rozwiązania $\mathsf{RoE} = \tilde{\Theta}(\sqrt{n})$ (Jia et al. '05).

W przypadku online najlepsze rozwiązanie jest $\tilde{\Theta}(\log n \log m)$ kompetytywne (Alon et al. '03).

Algorytm uniwersalny

Ustalmy długość sekwencji wejściowej na k oraz niech $\mu = \mathbf{E}_{\omega \in U^k}[|\mathsf{OPT}(\omega)|]$ oznacza oczekiwany koszt rozwiązania optymalnego.

Lemat 6 (Istnienie małego prawie pokrycia) *Istnieje 2μ zbiorów w C, które pokrywają wszystkie oprócz co najwyżej δn elementów z U, dla $\delta = \mu \frac{3 \ln 2m}{k}$.*

Algorytm zachłanny znajduje $2\mu \log n$ zbiorów pokrywających U bez δn elementów.

Do pokrycia pozostałych elementów potrzebujemy $\delta n \times \frac{k}{n} = 3\mu \ln 2m$ zbiorów.

Algorytm uniwersalny

Mamy n^k możliwych sekwencji i co najmniej w $\frac{1}{2}$ z nich koszt optymalnego pokrycia wierzchołkowego wynosi mniej niż 2μ.

Mamy co najwyżej $p \leq (2m)^{2\mu} = e^{2\mu \ln 2m}$ kolekcji C_i składających się z 2μ zbiorów.

Załóżmy przez sprzeczność, że wszystkie C_i pokrywają mniej niż $n(1-\delta) < ne^{-\delta} = e^{\ln n - \delta}$ elementów.

Algorytm uniwersalny

Dla każdej sekwencji elementy mogą zostać wybrane z którejś kolekcji C_i, dlatego:

$$\sum_{i=0}^{p} |C_i|^k \geq \frac{1}{2} n^k.$$

Tak więc:

$$e^{2\mu \ln 2m} \left(e^{\ln n - \delta} \right)^k > \frac{1}{2} e^{k \ln n},$$

$$e^{2\mu \ln 2m + k \ln n - \delta} > \frac{1}{2} e^{k \ln n}.$$

Algorytm uniwersalny

$$e^{2\mu \ln 2m + k \ln n - \delta} > \frac{1}{2} e^{k \ln n}.$$

$$e^{2\mu \ln 2m - \delta k} > \frac{1}{2}$$

$$e^{-\mu \ln 2m} > \frac{1}{2}$$

Ale $m \geq 1$ oraz $\mu \geq 1$, tak więc otrzymujemy sprzeczność:

$$\frac{1}{2} = e^{-\ln 2} \geq e^{-\mu \ln 2m}.$$

Algorytm uniwersalny

Ostatecznie otrzymujemy, że do pokrycia wszystkich zbiorów potrzeba

- $2\mu \log n$ zbiorów pokrywających U bez δn elementów,
- $\delta n \times \frac{k}{n} = 3\mu \ln 2m$ zbiorów do pokrycia pozostałych elementów.

suma to $2\mu \log n + 3\mu \ln 2m = O(\log(nm)) \times \mu$.

Twierdzenie 7 *Istnieją wartości m i n takie, że dla każdej* **S** *dla nieważonego uniwersalnego stochastycznego pokrycia zbiorami mamy* $\mathsf{RoE} = \Omega\left(\frac{\log m}{\log\log m - \log\log n}\right)$.

Algorytm uniwersalny

Lukę między dolnym i górnym ograniczeniem możemy wypełnić poprawiając nie znaczenie algorytm.

Twierdzenie 8 *Dla $m > n$, istnieje algorytm dla nieważonego uniwersalnego stochatycznego pokrycia zbiorami dla którego* $\mathsf{RoE} = O\left(\frac{\log m}{\log\log m - \log\log n}\right)$.

Klasyczne dolne ograniczenie $\Omega(\log n)$ nadal obowiązuje.

Algorytm uniwersalny z wagami

Powyższy wynik możemy uogólnić do problemu z wagami.

Twierdzenie 9 *Dla zadanego k istnieje uniwersalny stochastyczny algorytm dla pokrycia zbiorami dla którego* $\mathsf{RoE} = O(\log mn)$.

W modelu niezależnej aktywacji znamy k ze względu na koncentrację.

Lemat 10 *W przypadki gdy k jest nieznane dla każdego algorytmu* $\mathsf{RoE} = \Omega(\sqrt{n})$.

Algorytm online

Tak jak w przypadku drzewa Steinera online możemy tutaj zastosować technikę skalowania oczekiwanego kosztu rozwiązania.

W każdej skali zwiększamy koszt dwa razy, tak aby ostatni z nich dominował cały ciąg.

Twierdzenie 11 *Istnieje algorytm online dla stochastycznego pokrycia zbiorami taki, że* $\mathsf{RoE} = O(\log mn)$.

Algorytm uniwersalny z wagami

Załóżmy na chwile, że algorytm zna $\mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right]$.

while $U \neq \emptyset$ **do**

- niech S będzie zbiorem z C minimalizującym $\frac{c(S)}{|S \cap U|}$;
- jeżeli $\frac{c(S)}{|S \cap U|} > \frac{64\mathbf{E}[c(\mathsf{OPT})]}{|U|}$ to niech S będzie zbiorem z S minimalizującym $c(S)$;
- $\mathbf{S}(u) = S$ dla każdego $u \in S \cap U$;
- $U \leftarrow U \setminus S$;
- usuń z C zbiory S dla których $U \cap S = \emptyset$;

Algorytm uniwersalny z wagami

Zauważmy, że algorytm porównuje $\mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right]$ tylko z ułamkiem $\frac{c(S)\cdot|U|}{|S\cap U|}$ dla różnych zbiorów S.

Ułamek ten może przyjąć co najwyżej n^2m różnych wartości i dlatego algorytm może wygenerować co najwyżej n^2m+1 różnych funkcji $\{\mathbf{S}_i\}_{i=1}^{nm+1}$.

Generujemy wszystkie $\mathbf{S}$ i wybieramy to o minimalnym oczekiwanym koszcie:

$$\mathbf{E}\left[c(\mathbf{S})\right] = \sum_{S\in C} c(S)\cdot \Pr[\omega \cap \mathbf{S}^{-1}(S) \neq \emptyset],$$

gdzie $\mathbf{S}^{-1}(S)$ to przeciwobraz $S \in C$.

Algorytm uniwersalny z wagami

W każdej iteracji algorytmu wybieramy albo:

- zbiór o najlepszym współczynniku kosztu do liczby pokrywanych elementów — zbiór *Typu I*,
- bądź najtańszy zbiór pokrywający co najmniej jeden element — zbiór *Typu II*.

Trzeba zaznaczyć, że U zmienia się w każdym kroku, możemy więc na zmianę wybierać zbiory typu I lub II.

Obydwa typy zbiorów są konieczne do poprawnego działania algorytmu.

Algorytm uniwersalny z wagami

Zacznijmy od ograniczenia kosztu zbiorów typu I, co możemy uczynić przy użyciu standardowej analizy techniki zachłannej.

Lemat 12 *Koszt zbiorów I typu wybranych przez algorytm wynosi* $O(\log n) \cdot \mathbf{E}\left[c(\mathit{OPT})\right]$.

Niech $S_1, \ldots, S_\ell$ będą zbiorami typu I wybranymi przez algorytm w tej kolejności.

Co więcej, niech U_i oznacza zbiór nieprzykrytych elementów zaraz przed wybraniam S_i.

Algorytm uniwersalny z wagami

Ponieważ algorytm wybrał zbiór typu I to:

$$c(S_i) \leq |S_i \cap U_i| \frac{64\, \mathbf{E}[c(\mathsf{OPT})]}{|U_i|}.$$

Tak więc całkowity koszt zbiorów S_i możemy ograniczyć przez:

$$\sum_{i=1}^{\ell} c(S_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} \frac{64|S_i \cap U_i| \times \mathbf{E}[c(\mathsf{OPT})]}{|U_i|} \leq$$

$$\leq 64\, \mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right] \cdot \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{|S_i \cap U_i|} \frac{1}{|U_i| - j + 1} \leq$$

$$\leq 64 \mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right] \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t},$$

co wynosi co najwyżej $64\mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right] \ln n$.

Algorytm uniwersalny z wagami

Przejdziemy teraz do oszacowania oczekiwanego kosztu zbiorów wybranych w drugim etapie.

Niech $S_1, \ldots, S_\ell$ oznacza zbiory typu II wybrane przez algorytm w tej kolejności.

Zauważmy, że zbiory te wybierane są ze względu na koszt, a więc $c(S_i) \leq c(S_{i+1})$ dla każdego $1 \leq i \leq \ell - 1$.

Pomysł na dowód jest taki aby podzielić ważony problem na podproblemy nieważone i dla każdego nieważonego podproblemu użyć znanej już techniki.

Algorytm uniwersalny z wagami

Niech U_i oznacza zbiór niepokrytych elementów chwilę przez wybraniem S_i.

Oznaczmy $n_i = |U_i|$ oraz niech $k_i = n_i \frac{k}{n}$ będzie oczekiwaną liczbą elementów wylosowanych z U_i.

Oznaczmy przez ω_i podsekwencję ω otrzymaną przez wybranie tylko elementów z U_i.

Niech $\mathsf{OPT}|_{\omega_i}$ będzie pokryciem zbiorami otrzymanym poprzez wzięcie dla każdego $u \in \omega_i$ najtańszego zbioru z $\mathsf{OPT} = \mathsf{OPT}_\omega$ zawierającego u.

Algorytm uniwersalny z wagami

Analogicznie do przypadku nieważonego możemy pokazać następujący lemat.

Lemat 13 *Dla każdego* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, *jeżeli* $k_i \geq 8 \log 2n$ *to* $k_i \leq 16\mathbf{E}\left[|OPT|_{\omega_i}|\right] \log m$.

Lemat 14 *Istnieje* 2μ *zbiorów w* C, *które pokrywają wszystkie oprócz co najwyżej* δn *elementów z* U, *dla* $\delta = \mu \frac{3 \ln 2m}{k}$.

Oczekiwana liczba elementów nieprzykrytych $\leq \delta n \times \frac{k}{n} = \mu \frac{3 \ln 2m}{k} n \times \frac{k}{n} = \mu 3 \ln 2m$.

Algorytm uniwersalny z wagami

Lemat 15 *Dla każdego* $1 \leq i \leq \ell$,

$$c(S_i)\mathbf{E}\left[|\mathit{OPT}|_{\omega_{i+1}}|\right] \leq \mathbf{E}\left[c(\mathit{OPT}|_{\omega_{i+1}})\right]$$

Zbiór S_{i+1} jest najtańszym zbiorem pokrywającym elementy z U_{i+1}.

Tak więc $c(S_{i+1})$ jest dolnym ograniczenem na koszt zbiorów w $\mathsf{OPT}|_{\omega_{i+1}}$.

Z definicji algorytmu $c(S_i) \leq c(S_{i+1})$, czyli:

$$c(S_i)|\mathsf{OPT}|_{\omega_{i+1}}| \leq c(S_{i+1})|\mathsf{OPT}|_{\omega_{i+1}}| \leq c(\mathsf{OPT}|_{\omega_{i+i}}).$$

Algorytm uniwersalny z wagami

Lemat 16 *Dla każdego* $1 \leq i \leq \ell$*,*

$$c(S_i)\left(\mathbf{E}\left[|\mathit{OPT}|_{\omega_i}|\right] - \mathbf{E}\left[|\mathit{OPT}|_{\omega_{i+1}}|\right]\right) \leq \mathbf{E}\left[c(\mathit{OPT}|_{\omega_i})\right] - \mathbf{E}\left[c(\mathit{OPT}|_{\omega_{i+1}})\right].$$

Liczba zbiorów OPT użyta do pokrycie elementów z $U_i \setminus U_{i+1}$ wynosi $|\mathrm{OPT}|_{\omega_i}| - |\mathrm{OPT}|_{\omega_{i+1}}|$

Do pokrycia tych elementów OPT musi zapłacić co najmniej $c(S_i)$, tak więc:

$c(S_i)(|\mathrm{OPT}|_{\omega_i}| - |\mathrm{OPT}|_{\omega_{i+1}}|) \leq c(\mathrm{OPT}|_{\omega_i}) - c(\mathrm{OPT}|_{\omega_{i+1}})$.

Algorytm uniwersalny z wagami

Możemy teraz ograniczyć koszt zbiorów typu II:

Lemat 17 *Oczekiwany koszt zbiorów drugiego typu wybranych przez algorytm jest ograniczony przez* $O(\log mn)\,\mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right]$.

Zbiorami drugiego typu były zbiory $S_1, S_2, \ldots, S_\ell$.

Niech $k_{\ell+1} = 0$ oraz $c(S_0) = 0$ dla wygody notacji.

Algorytm uniwersalny z wagami

Lemat 18 *Dla każdego* $i \in \{1, \ldots, \ell\}$*, jeżeli* $k_i \geq 8 \log 2n$ *to* $k_i \leq 16\mathbf{E}\left[|OPT|_{\omega_i}|\right] \log m$.

Niech j będzie takie, że $k_j \geq 8 \log 2n$ ale $k_{j+1} < 8 \log 2n$.

Oczekiwana liczba elementów wylosowanych z U_{j+1} wynosi co najwyżej $8 \log 2n$.

Każdy z tych elementów jest pokryty zbiorem nie kosztującym więcej niż zbiór wybrany w OPT.

Dlatego koszt użytych zbiorów $S_{j+1}, \ldots, S_\ell$ jest ograniczony przez $8 \log 2n\, \mathbf{E}\left[c(\mathrm{OPT})\right]$.

Algorytm uniwersalny z wagami

Natomiast koszt zbiorów $S_1, \ldots, S_j$ wynosi:

$$\sum_{i=1}^{j} c(S_i)\mathbf{Pr}[\omega \cap (S_i \cap U_i) \neq \emptyset] \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{j} c(S_i)\mathbf{E}\left[|\omega \cap (S_i \cap U_i)|\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} c(S_i)\mathbf{E}\left[|\omega \cap (U_i \setminus U_{i+1})|\right] \leq \sum_{i=1}^{j} c(S_i)\left(k_i - k_{i+1}\right)$$

Algorytm uniwersalny z wagami

$$\leq \sum_{i=1}^{j} c(S_i)\,(k_i - k_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{j} k_i\,(c(S_i) - c(S_{i-1})) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{j} 16\mathbf{E}\left[|\mathsf{OPT}|_{\omega_i}|\right] \log m \cdot (c(S_i) - c(S_{i-1})) =$$

$$= 16 \log m \cdot \Bigg(c(S_j)\mathbf{E}\left[|\mathsf{OPT}|_{\omega_{j+1}}|\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j} c(S_i)\left(\mathbf{E}\left[|\mathsf{OPT}|_{\omega_i}|\right] - \mathbf{E}\left[|\mathsf{OPT}|_{\omega_{i+1}}|\right]\right)\Bigg).$$

Algorytm uniwersalny z wagami

$$= 16 \log m \cdot \left(c(S_j)\mathbf{E}\left[|\mathrm{OPT}|_{\omega_{j+1}}| \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{j} c(S_i) \left(\mathbf{E}\left[|\mathrm{OPT}|_{\omega_i}|\right] - \mathbf{E}\left[|\mathrm{OPT}|_{\omega_{i+1}}|\right] \right) \right) \leq$$

$$\leq 16 \log m \cdot \left(\mathbf{E}\left[c(\mathrm{OPT}|_{\omega_{j+1}}) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{j} \left(\mathbf{E}\left[c(\mathrm{OPT}|_{\omega_i})\right] - \mathbf{E}\left[c(\mathrm{OPT}|_{\omega_{i+1}})\right] \right) \right) \quad =$$

$$= 16\mathbf{E}\left[c(\mathrm{OPT}|_{\omega_1})\right] \log m = 16\mathbf{E}\left[c(\mathrm{OPT})\right] \log m.$$

Algorytm uniwersalny z wagami

Otrzymaliśmy więc następujące ograniczenia:

- zbiory I typu kosztują nie więcej niż
  - $64\mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right]\ln n$.
- zbiory II typu kosztują nie więcej niż
  - $8\log 2n\,\mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right]$ za $S_{j+1},\ldots,S_\ell$,
  - $16\mathbf{E}\left[c(\mathsf{OPT})\right]\log m$ za $S_1,\ldots,S_j$.

Otrzymaliśmy więc:

Twierdzenie 19 *Dla zadanego k istnieje uniwersalny stochastyczny algorytm dla pokrycia zbiorami dla którego* $\mathsf{RoE} = O(\log mn)$.

Niemetryczna lokalizacja fabryk

Wynik ten możemy uogólnić na problem nie metrycznej lokalizacji fabryk.

Twierdzenie 20 *Dla znanego k istnieje stochastyczny uniwersalny algorytm dla problemu niematrcznej lokalizacji fabryk taki, że* $\mathsf{RoE} = O(\log mn)$.

Dla algorytmu nie znającego k musi być $\mathsf{RoE} = \Omega(\sqrt{n})$.

Twierdzenie 21 *Istnieje algorytm online dla stochastycznego problemu niemetrycznej lokalizacji fabryk taki, że* $\mathsf{RoE} = O(\log mn)$.